



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

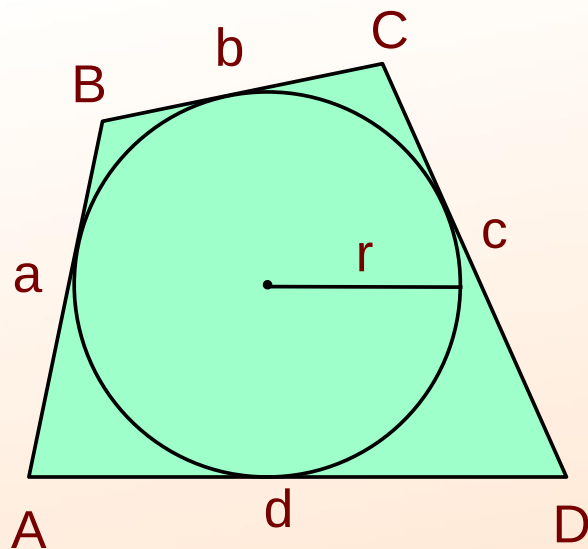
**ÁREA DE REGIONES
CUADRANGULARES**

**CICLO
PRE
2024-1**



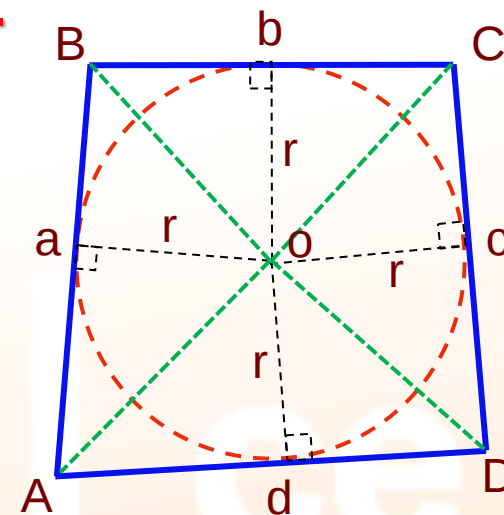
ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

Teorema.- El área de una región cuadrangular determinado por un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia es igual al producto del semiperímetro del cuadrilátero y el radio de la circunferencia inscrita.



$$S_{ABCD} = pr$$

Demostración.-



$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$$

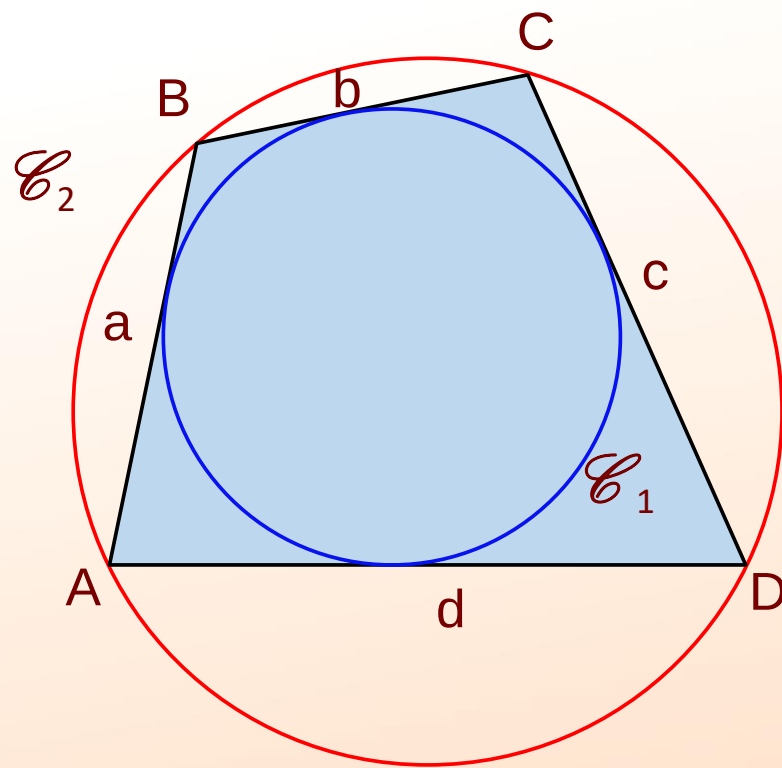
$$S_{ABCD} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2}$$

$$\text{si: } p = \frac{a + b + c + d}{2}$$

$$S_{ABCD} = pr$$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

Teorema.- El área de una región cuadrangular determinado por un cuadrilátero inscrito a una circunferencia y circunscrito a otra circunferencia es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes de los lados.



Si ABCD está circunscrito a la circunferencia $\mathcal{C}_1$ e inscrito a la circunferencia $\mathcal{C}_2$, entonces

$$S_{ABCD} = \sqrt{abcd}$$

Demostración.-

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

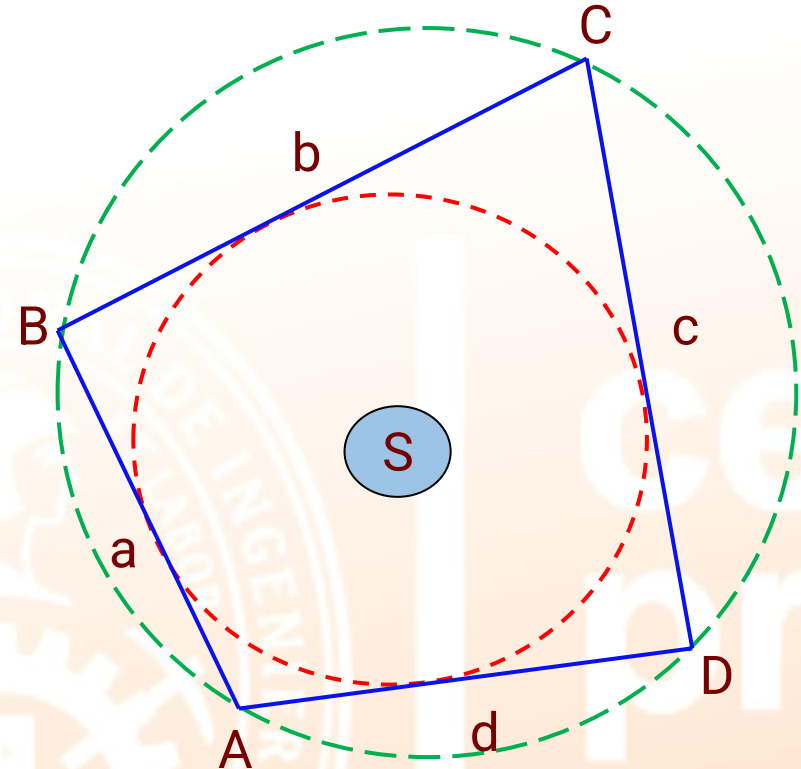
por el teorema de Pitot: $a + c = b + d$

si: $2p = a + c + b + d$

$$p = a + c = b + d$$

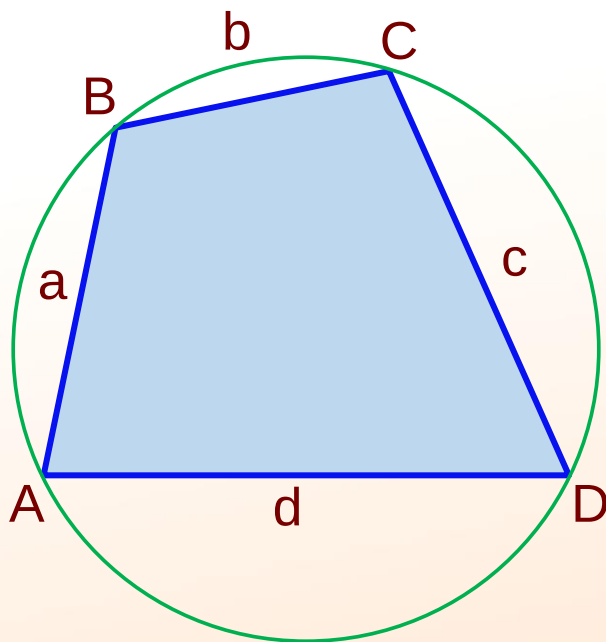
$$S_{ABCD} = \sqrt{(a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d)}$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{abcd}$$



ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

Teorema.- El área de una región cuadrangular determinado por un cuadrilátero inscrito a una circunferencia es igual a la raíz cuadrada del producto de las diferencias del semiperímetro con cada longitud de lado.

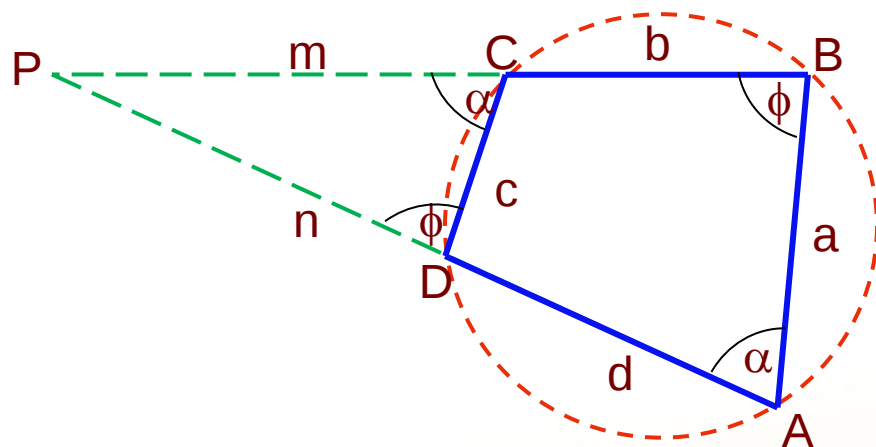


Donde p : semiperímetro de ABCD

Si ABCD está inscrito a la circunferencia, entonces

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Demostración.-



$$S_{ABCD} = S_{APB} - S_{CPD}$$

$$\triangle APB \sim \triangle CPD: \quad \frac{n}{m+b} = \frac{m}{n+d} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{m+n}{m+b+n+d} = \frac{c}{a} \Rightarrow m+n = c \frac{b+d}{a-c}$$

$$\frac{m-n}{n+d-m-b} = \frac{c}{a} \Rightarrow m-n = c \frac{d-b}{a+c}$$

$$\frac{S_{APB}}{S_{CPD}} = \frac{a^2}{c^2} \Rightarrow S_{APB} = \frac{a^2}{c^2} \cdot S_{CPD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{c^2 - a^2}{c^2} \cdot S_{ABCD}$$

$$S_{CPD} = \sqrt{\left(\frac{m+n+c}{2}\right)\left(\frac{m+n-c}{2}\right)\left(\frac{m-n+c}{2}\right)\left(\frac{-m+n+c}{2}\right)}$$

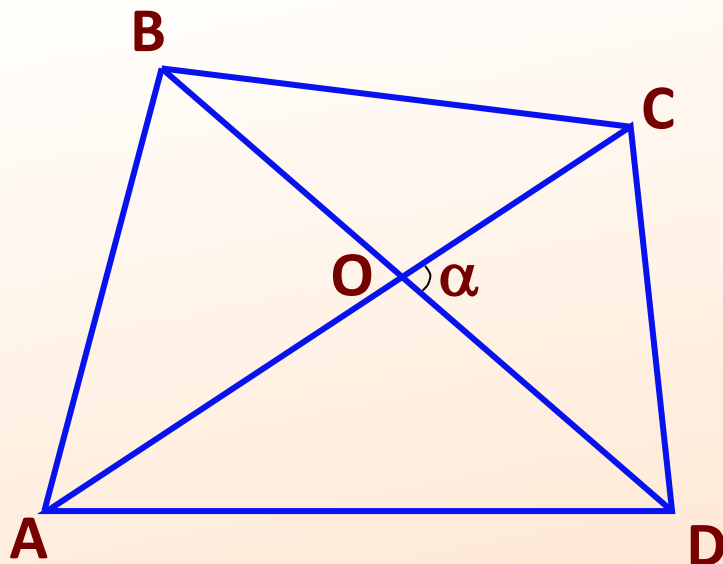
$$\text{Si: } 2p = a + b + c + d$$

$$S_{ABCD} = \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sqrt{c^4 \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(a-c)^2(a+c)^2}}$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

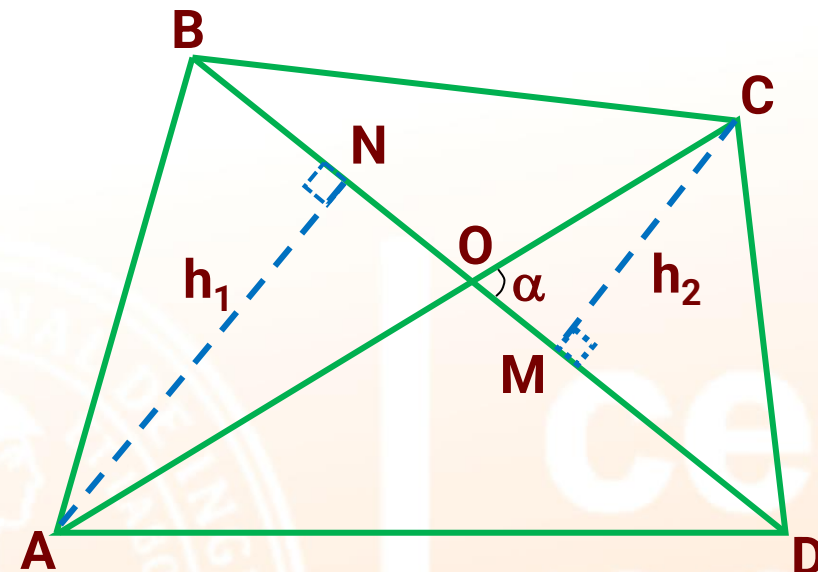
ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

Teorema.- El área de una región cuadrangular es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales multiplicado con el seno de la medida del ángulo determinan las rectas que contienen a dichas diagonales.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AC \cdot BD) \text{ Sen} \alpha$$

Demostración.-



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD (h_1 + h_2)$$

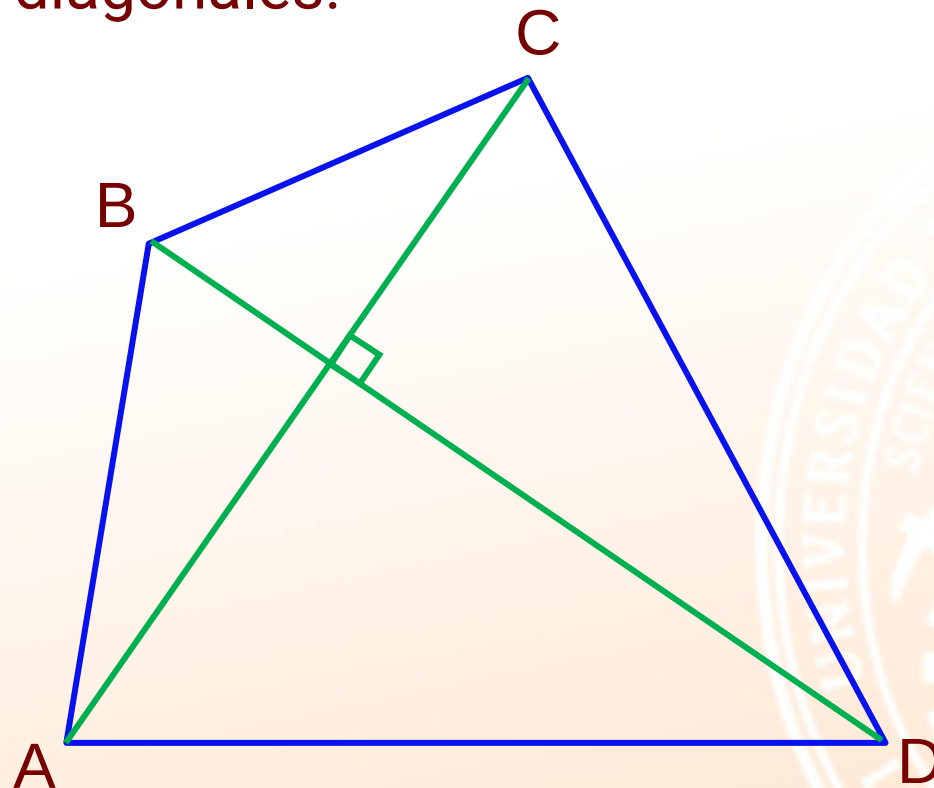
$$\text{Si: } h_1 = OA \cdot \text{Sen} \alpha$$

$$h_2 = OC \cdot \text{Sen} \alpha$$

$$\text{Luego: } h_1 + h_2 = AC \cdot \text{Sen} \alpha$$

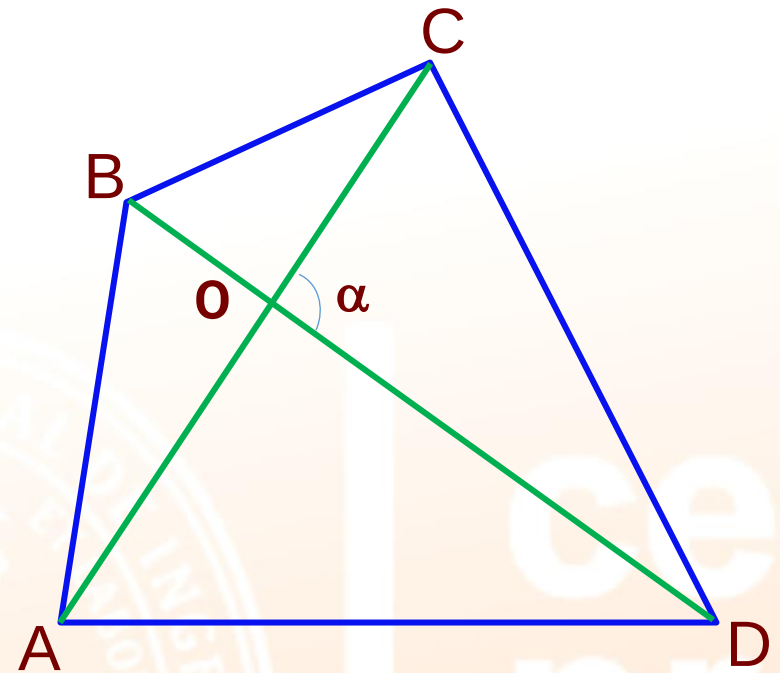
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AC \cdot BD) \text{ Sen} \alpha$$

Corolario.- El área de una región cuadrangular de diagonales perpendiculares, es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AC \cdot BD)$$

Demostración.-



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AC \cdot BD) \text{ Sen } \alpha$$

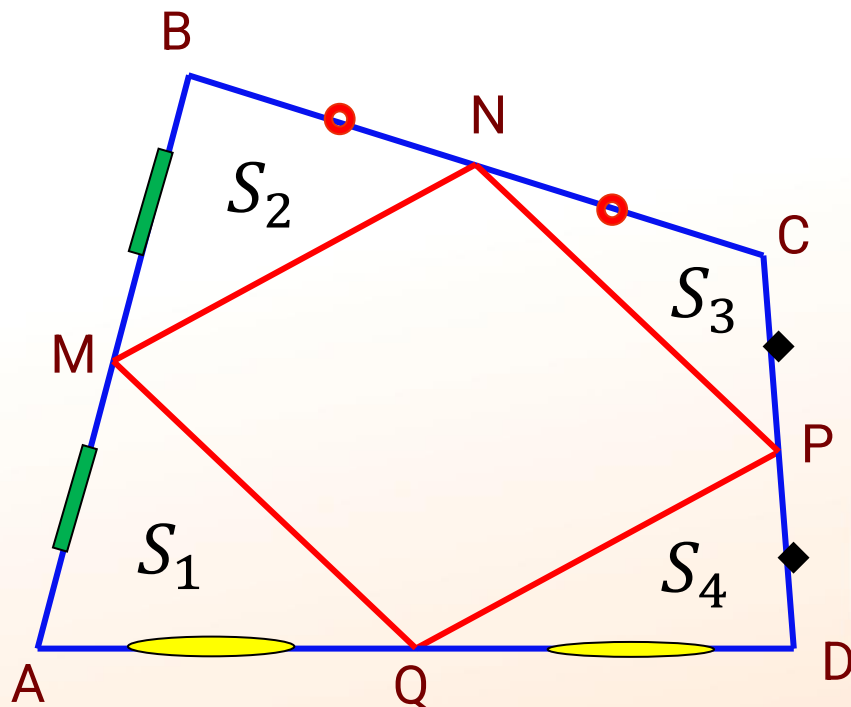
Si: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ entonces $\alpha = 90$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AC \cdot BD)$$

RELACIÓN DE ÁREAS EN REGIONES CUADRANGULARES

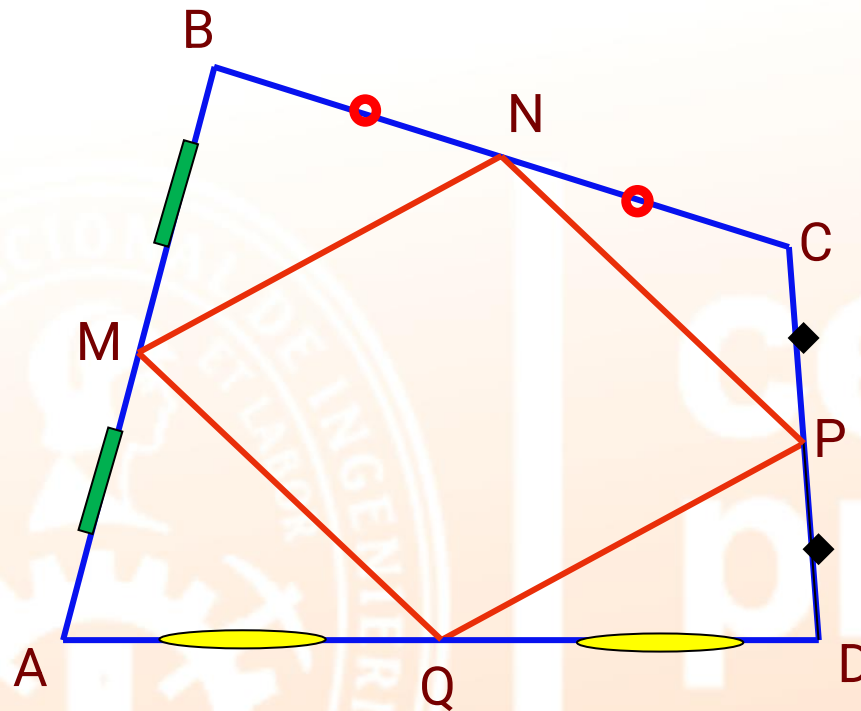
Teoremas :

1.



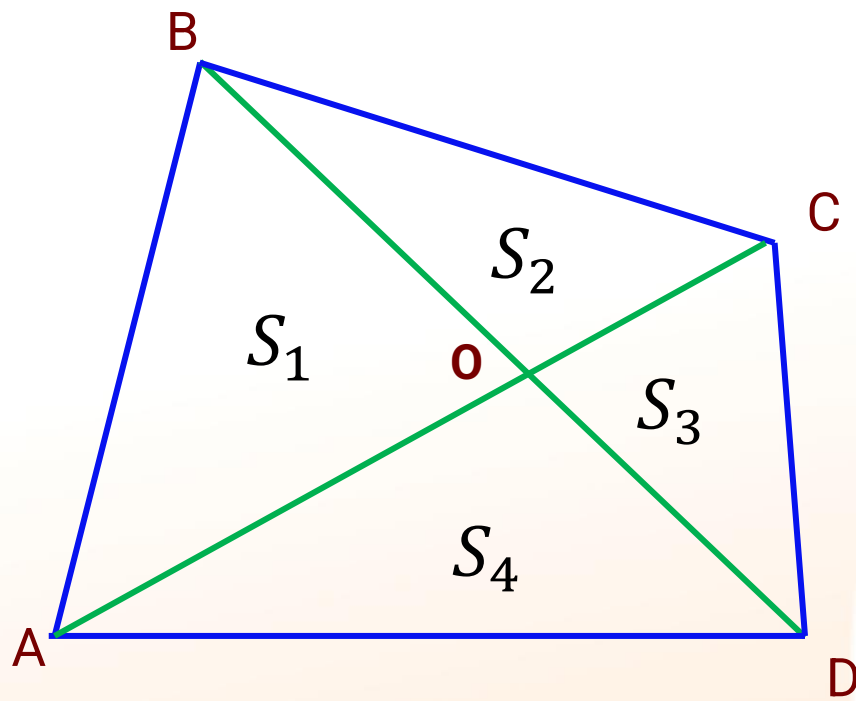
$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

2.



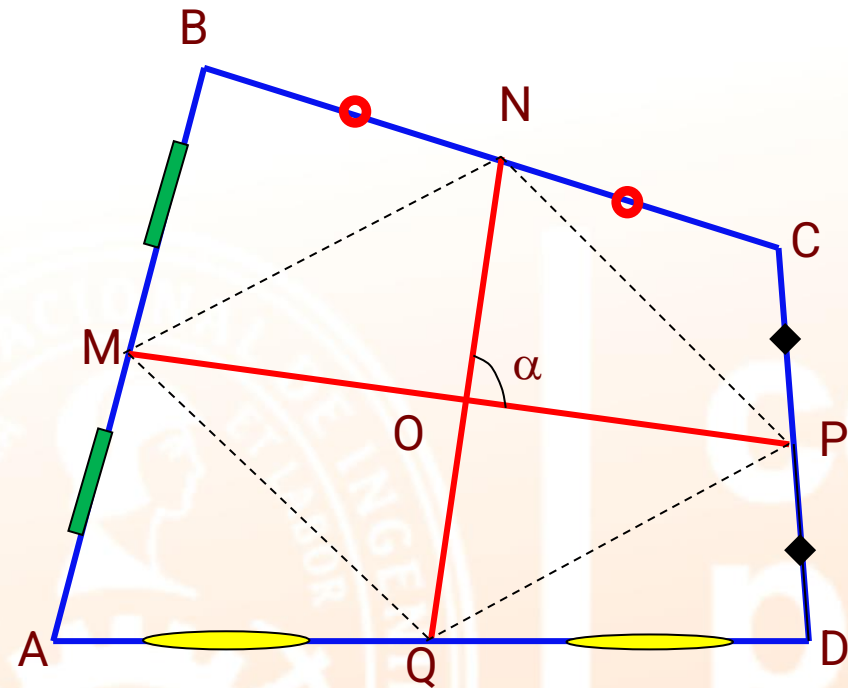
$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

3.



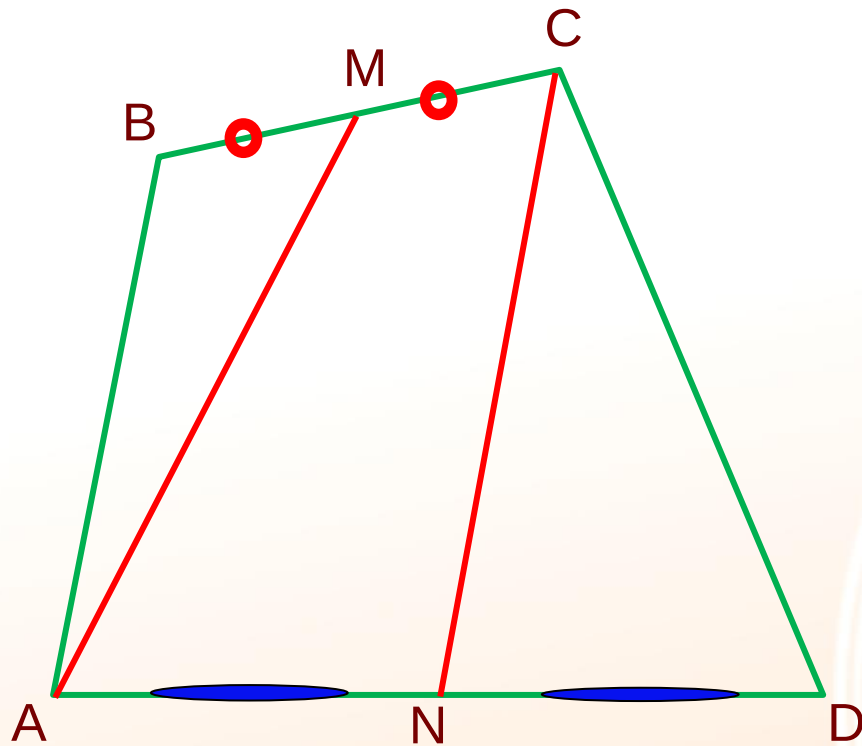
$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

4.



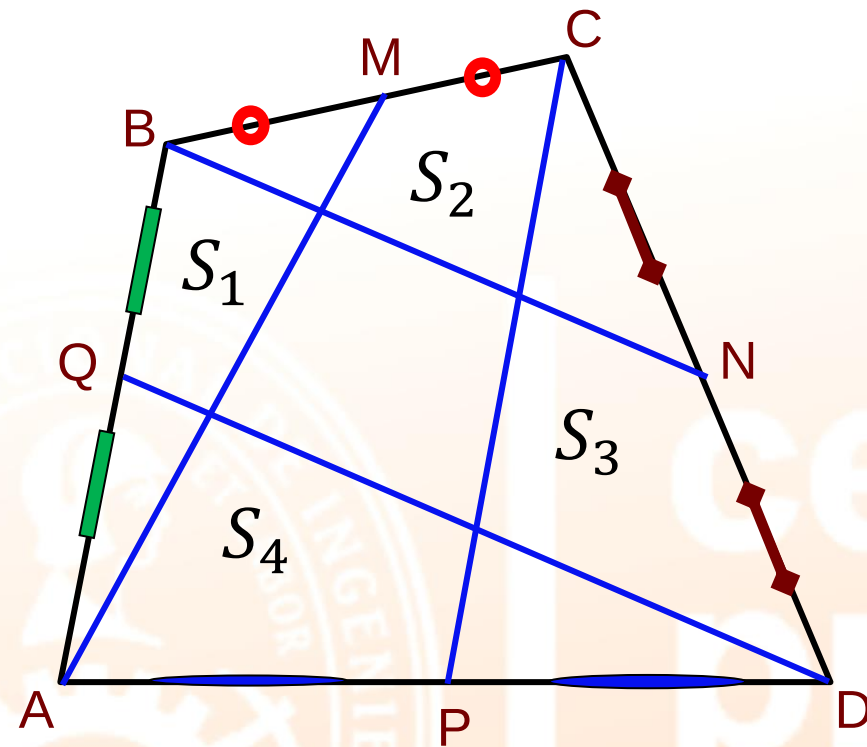
$$S_{ABCD} = MP \cdot NQ \cdot \text{Sen} \alpha$$

5.



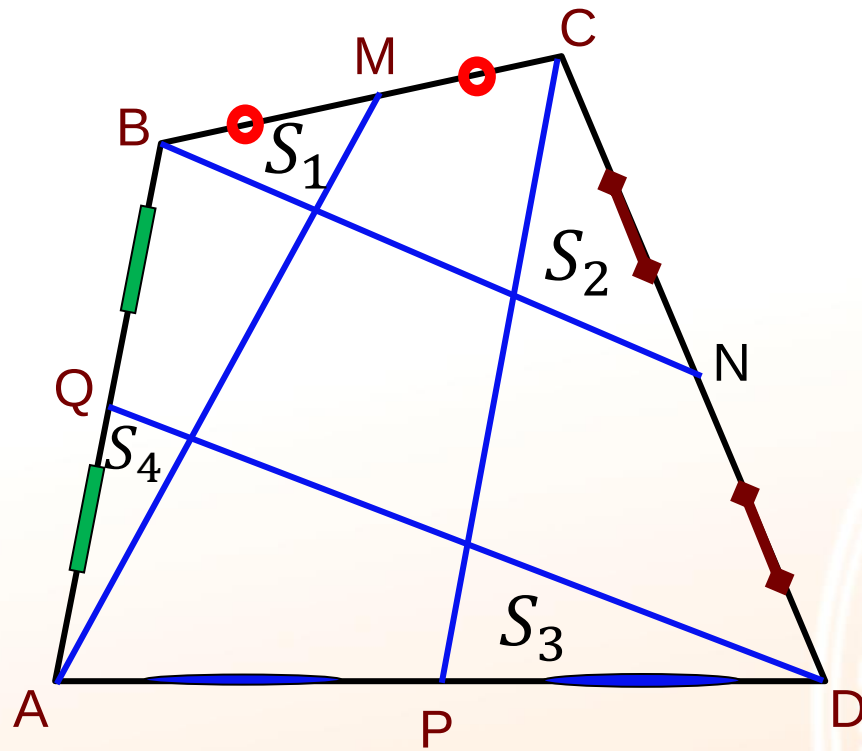
$$S_{AMCN} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

6.



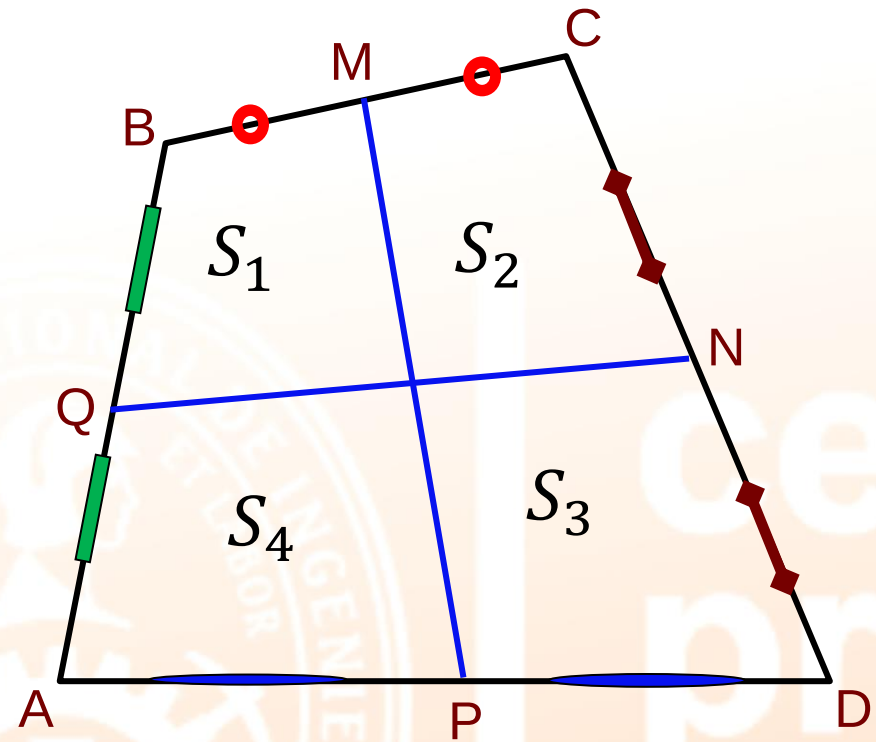
$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

7.



$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

8.

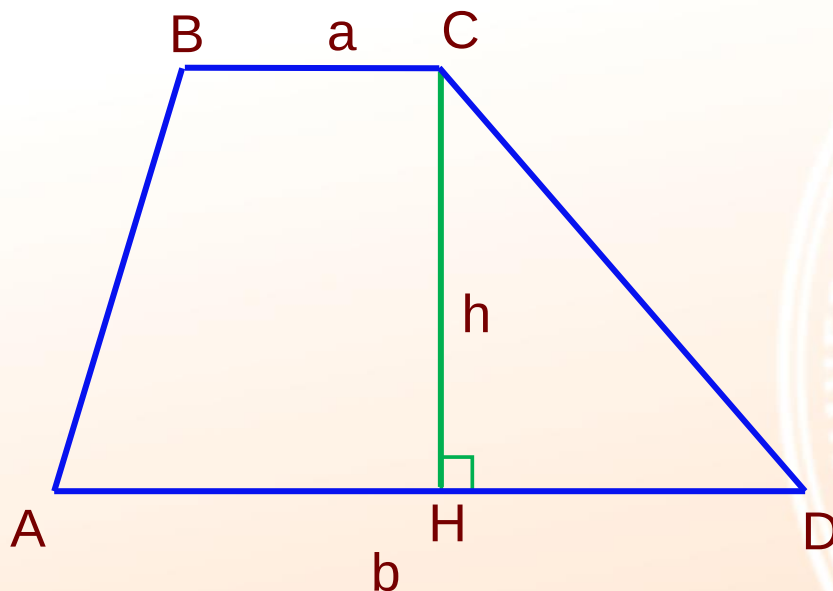


$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

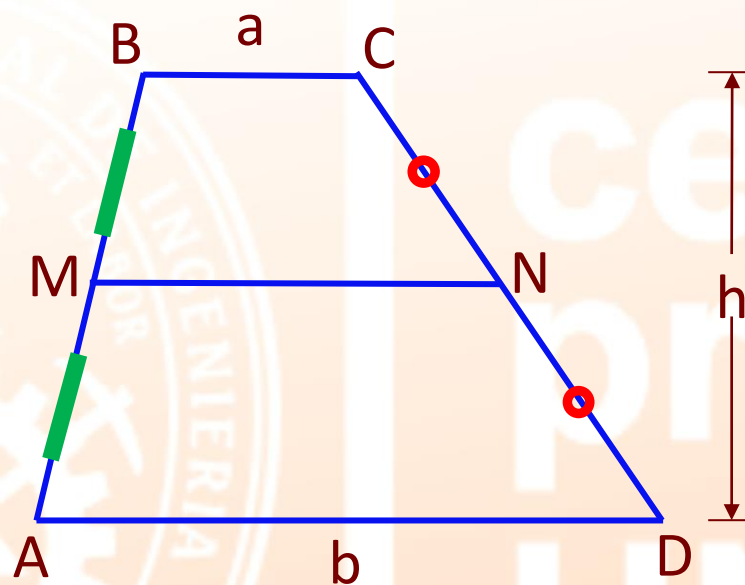
Teorema.-

El área de una región trapezoidal es igual, a la mitad del producto de la longitud de su altura y la suma de las longitudes de sus bases.



$$S_{ABCD} = \left(\frac{a + b}{2} \right) h$$

El área de una región trapezoidal es igual al producto de las longitudes de la mediana y la altura.

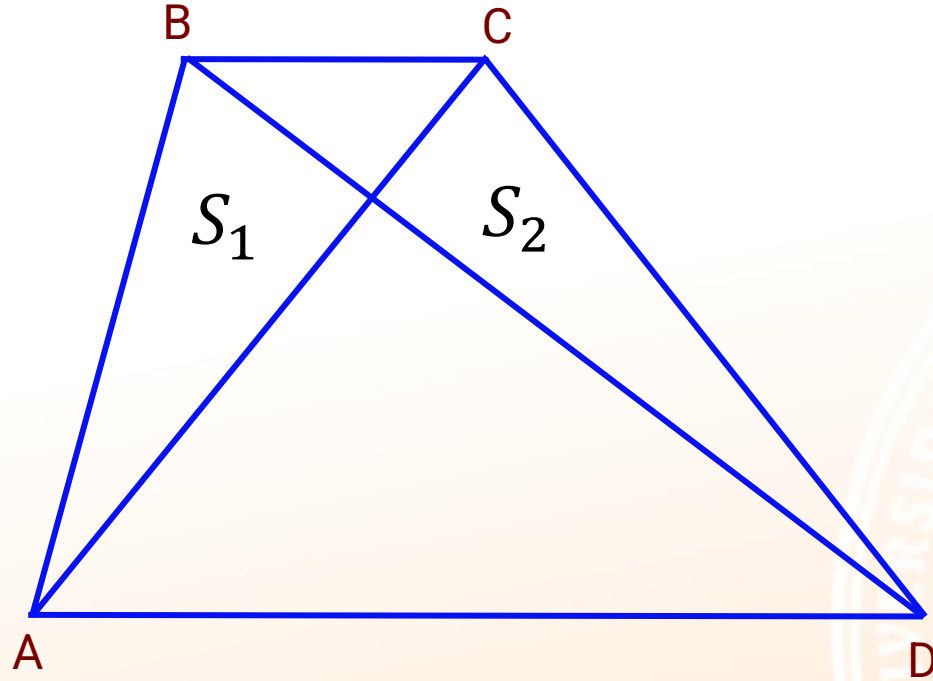


$$S_{ABCD} = (MN) h$$

RELACIÓN DE ÁREAS EN REGIONES TRAPECIALES

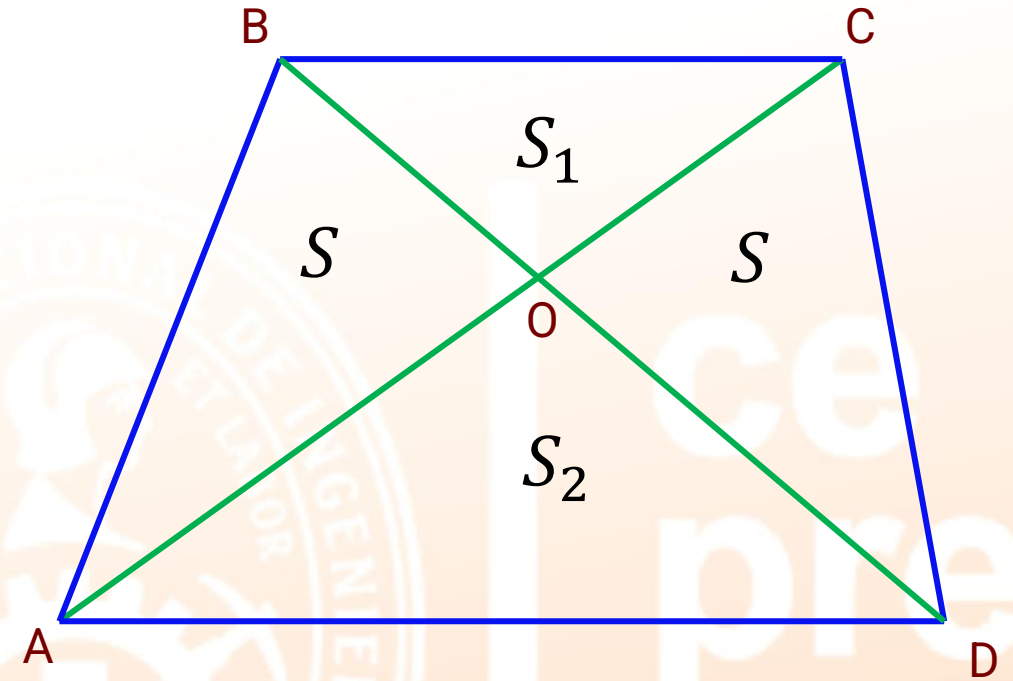
Teoremas :

1.



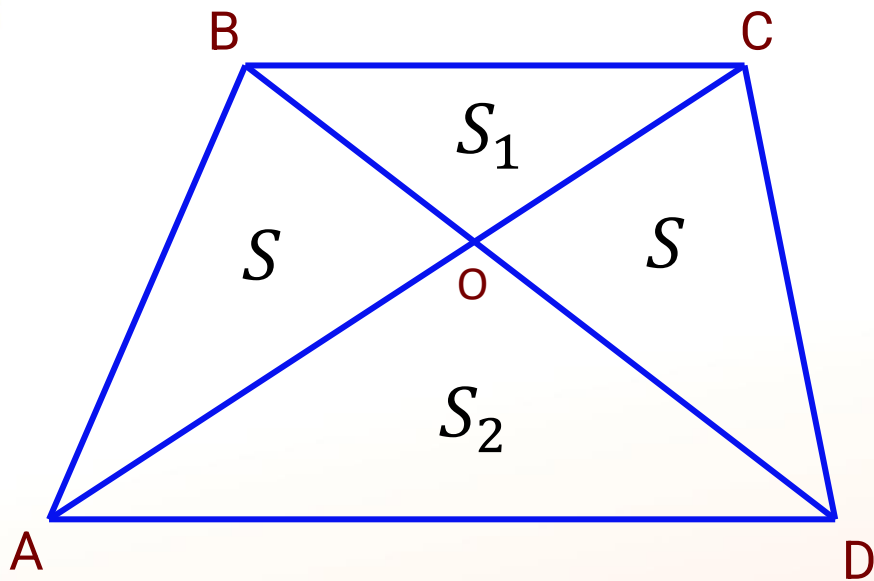
$$S_1 = S_2$$

2.



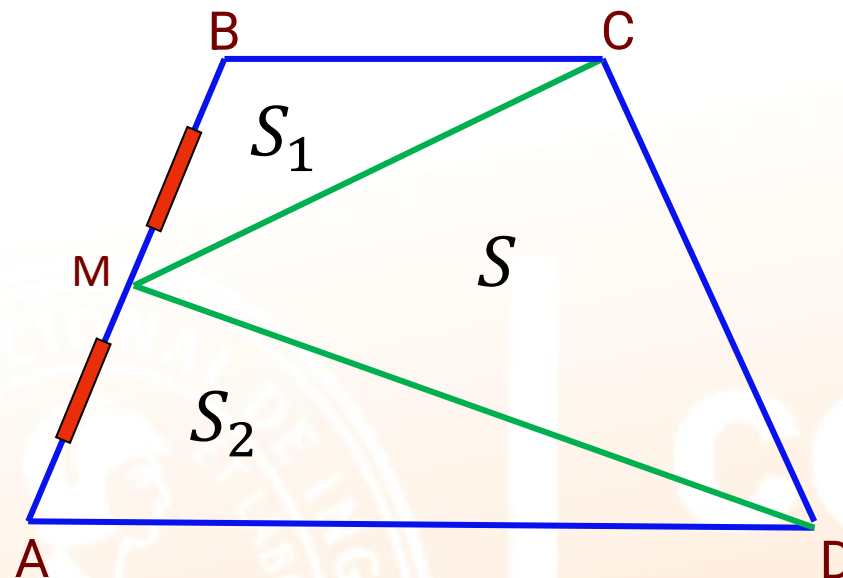
$$S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$

3.



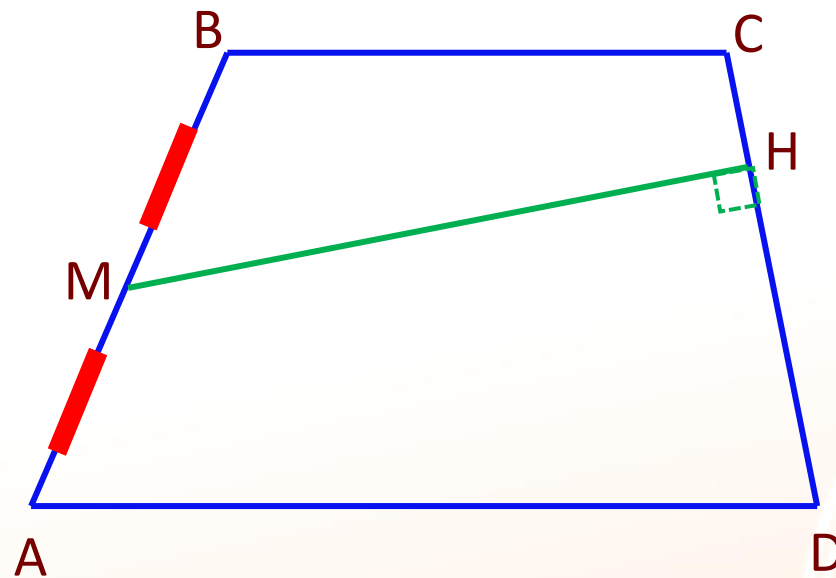
$$S_{ABCD} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

4.



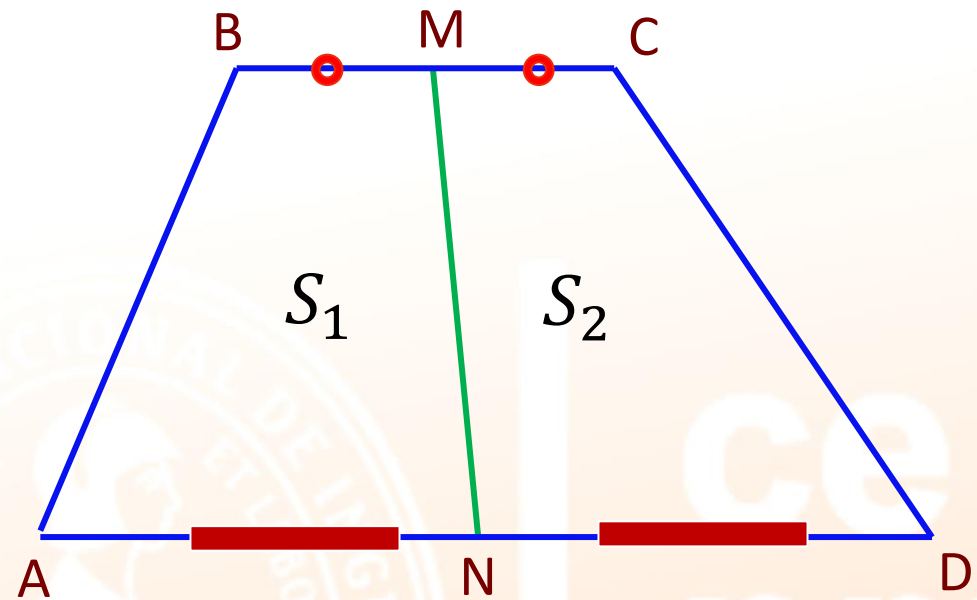
$$S = S_1 + S_2$$

5.



$$S_{ABCD} = (CD)(MH)$$

6.



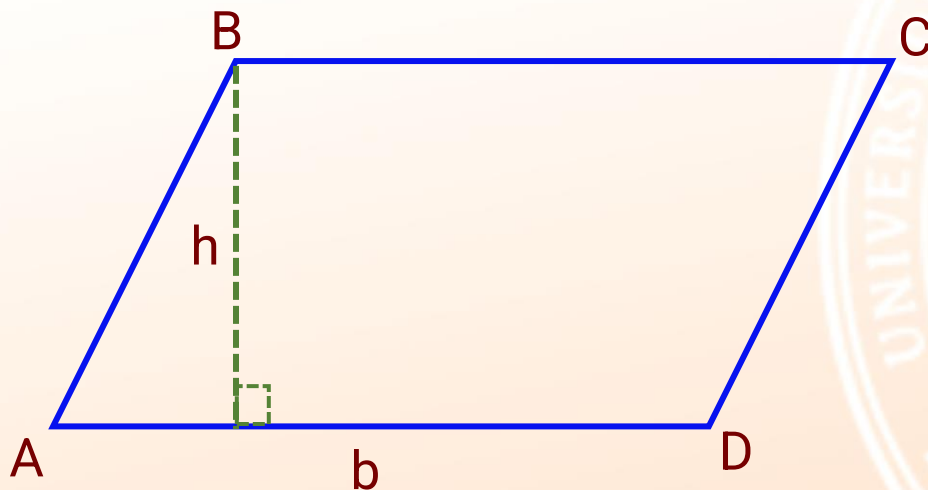
$$S_1 = S_2$$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

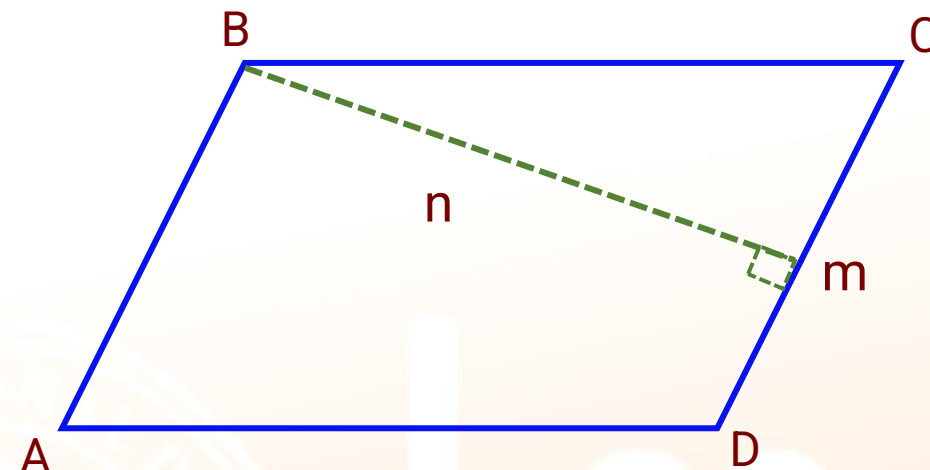
TEOREMA:

El área de una región paralelográmica es el producto de la longitud un lado cualquiera y la longitud de su altura correspondiente.

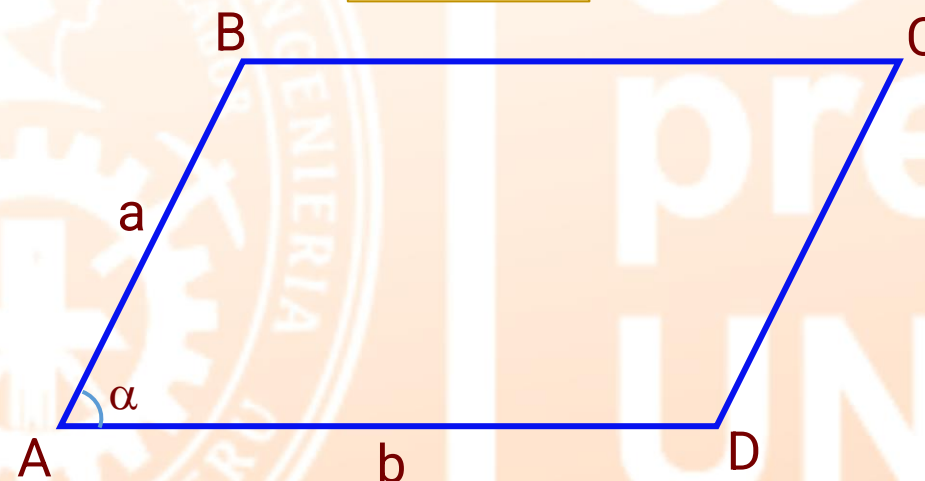
Sean b la longitud de un lado y h la altura dadas y sea S el área de la región paralelográmica ABCD.



$$S = b \cdot h$$

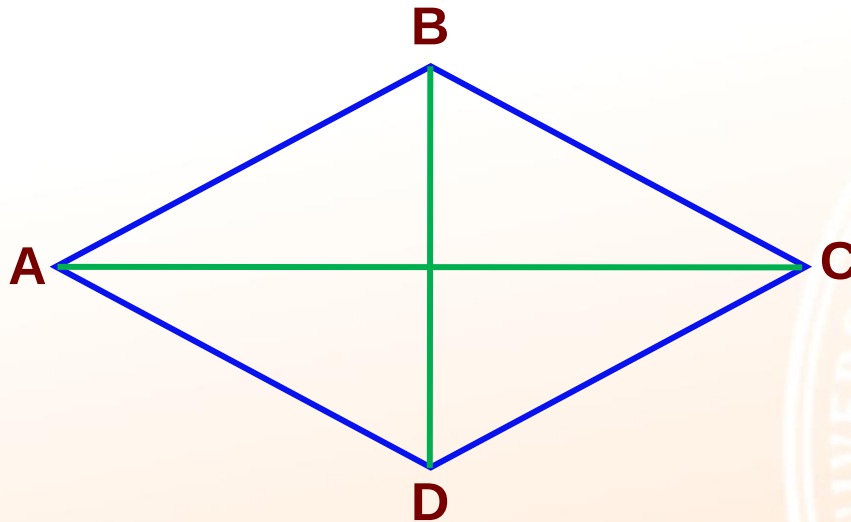


$$S = m \cdot n$$



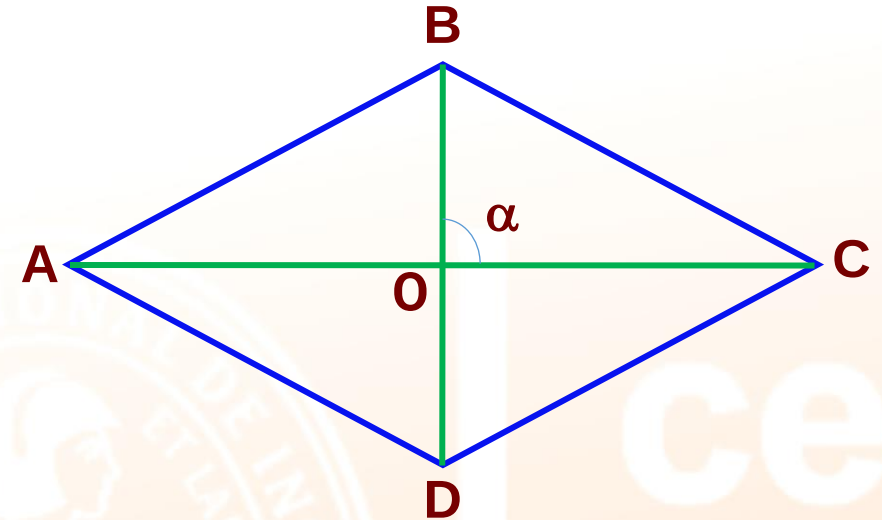
$$S = a \cdot b \cdot \text{Sen } \alpha$$

Corolario.- El área de una región cuadrangular determinado por un rombo es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AC \cdot BD)$$

Demostración.-



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AC \cdot BD) \text{ Sen } \alpha$$

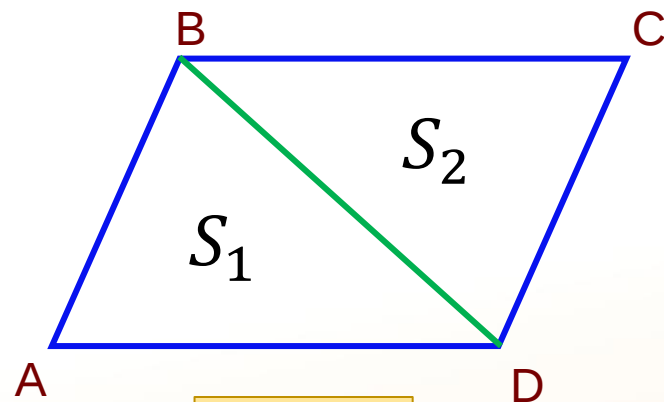
Si: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ entonces $\alpha = 90^\circ$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AC \cdot BD)$$

RELACIÓN DE ÁREAS EN REGIONES PARALELOGRAMICAS

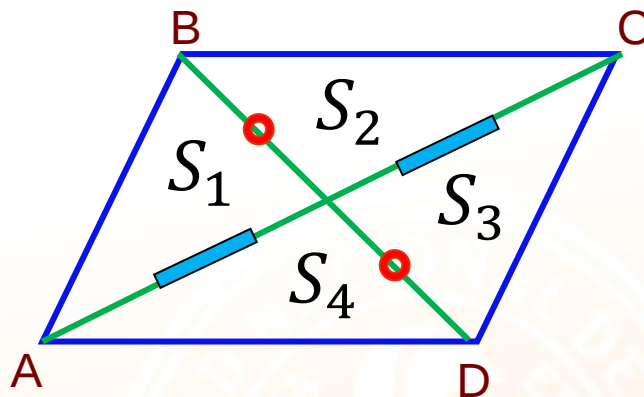
Teoremas:

1.



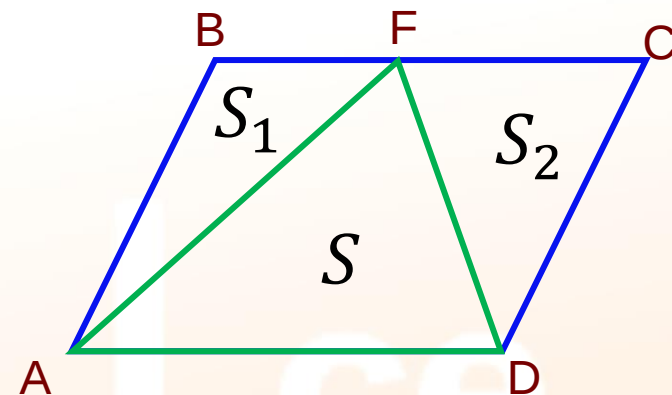
$$S_1 = S_2$$

2.



$$S_1 = S_3 = S_2 = S_4$$

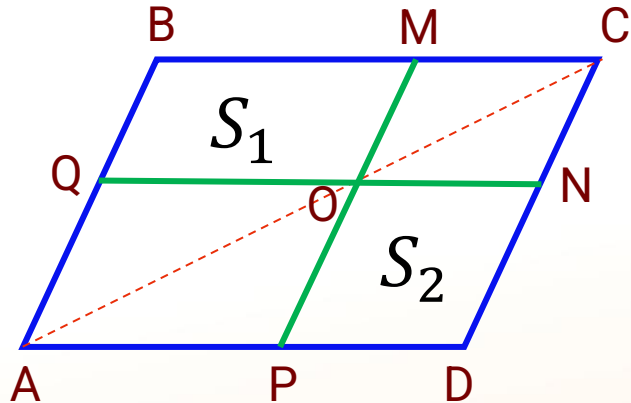
3.



$$S_{AFD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

4.

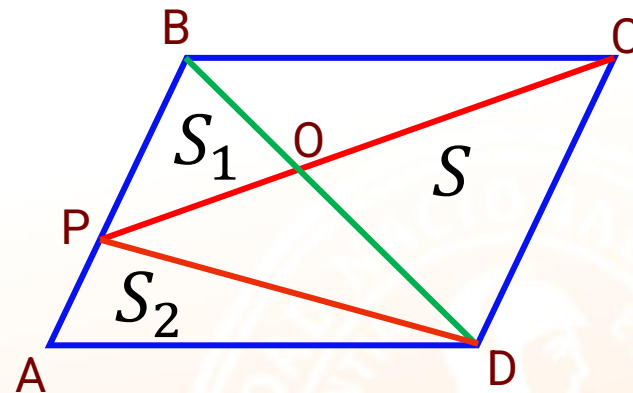
$QN \parallel AD$ y $MP \parallel AB$



$$S_1 = S_2$$

5.

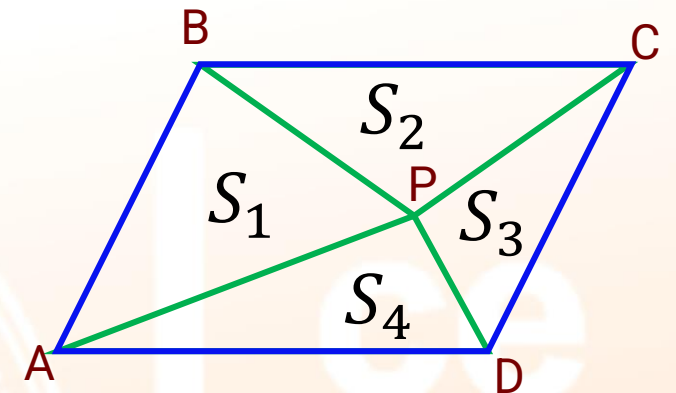
P es un punto de AB



$$S = S_1 + S_2$$

6.

P es un punto interior



$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{S_{ABCD}}{2}$$



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**ÁREA DE REGIONES
CUADRANGULARES**

**CICLO
PRE
2024-I**



EJERCICIO 01

En una circunferencia se ubican los puntos A, B, C y D, tal que, $m\widehat{BA} = 90$, $m\widehat{BC} = 30$ y $m\widehat{CD} = 150$. Si la longitud del radio de la circunferencia es r , entonces el área de la región cuadrangular ABCD es

A) $\frac{3}{2}r^2$

B) $2\sqrt{3}r^2$

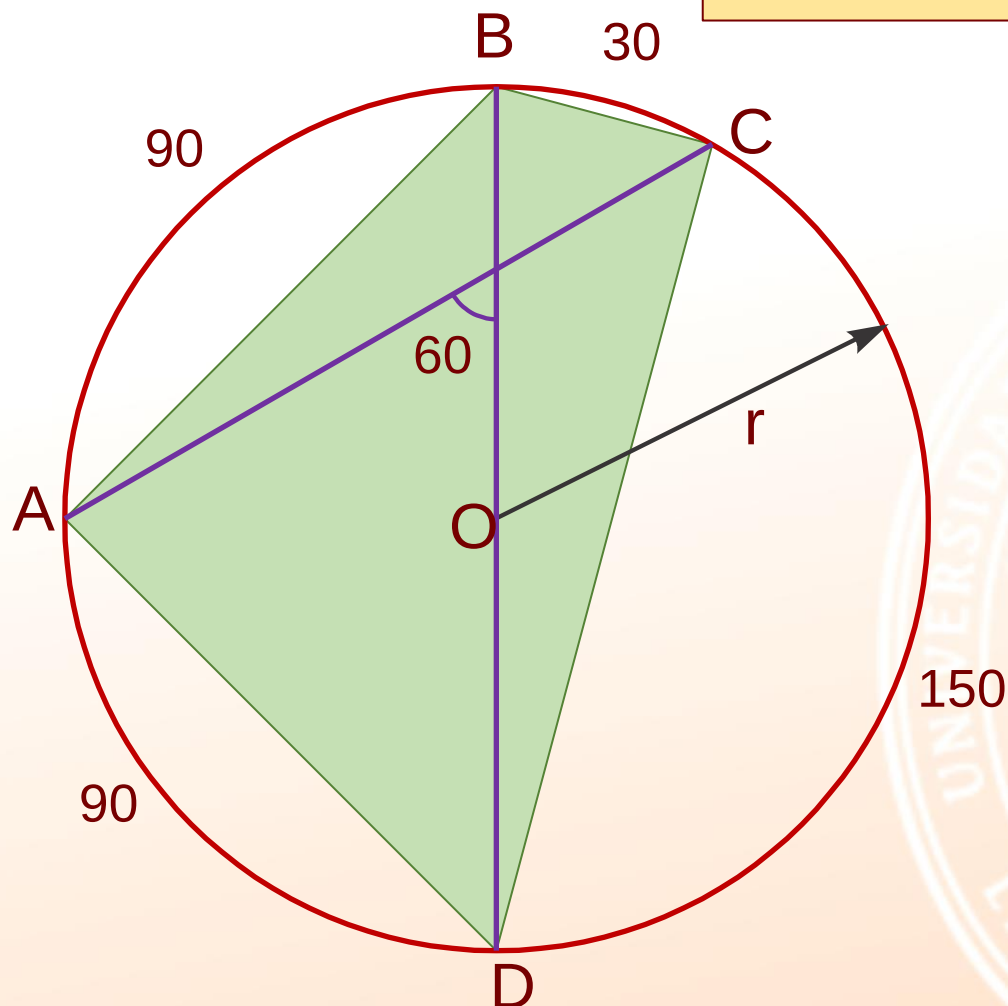
C) $\sqrt{3}r^2$

D) $3\sqrt{3}r^2$

E) $\frac{r^2}{2}$

RESOLUCIÓN 01

En una circunferencia se ubican los puntos A, B, C y D, tal que, $m\widehat{BA} = 90$, $m\widehat{BC} = 30$ y $m\widehat{CD} = 150$. Si la longitud del radio de la circunferencia es r , entonces el área de la región cuadrangular ABCD es



Calcule: $S_{\square ABCD}$

$$\text{Arco } AC = 120 \rightarrow AC = l_3 = r\sqrt{3}$$

Del gráfico $BD = 2r$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)\text{Sen}(60)}{2}$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(r\sqrt{3})(2r)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{3}{2}r^2$$

EJERCICIO 02

En un cuadrado ABCD; M es punto medio de $\overline{CD}$, se traza $\overline{AF}$ perpendicular a $\overline{BM}$ en el punto F. Si $FD = \sqrt{7}$ cm, entonces el área (en cm^2) de la región cuadrada ABCD es

A) $2\sqrt{7}$

B) $3\sqrt{7}$

C) 6

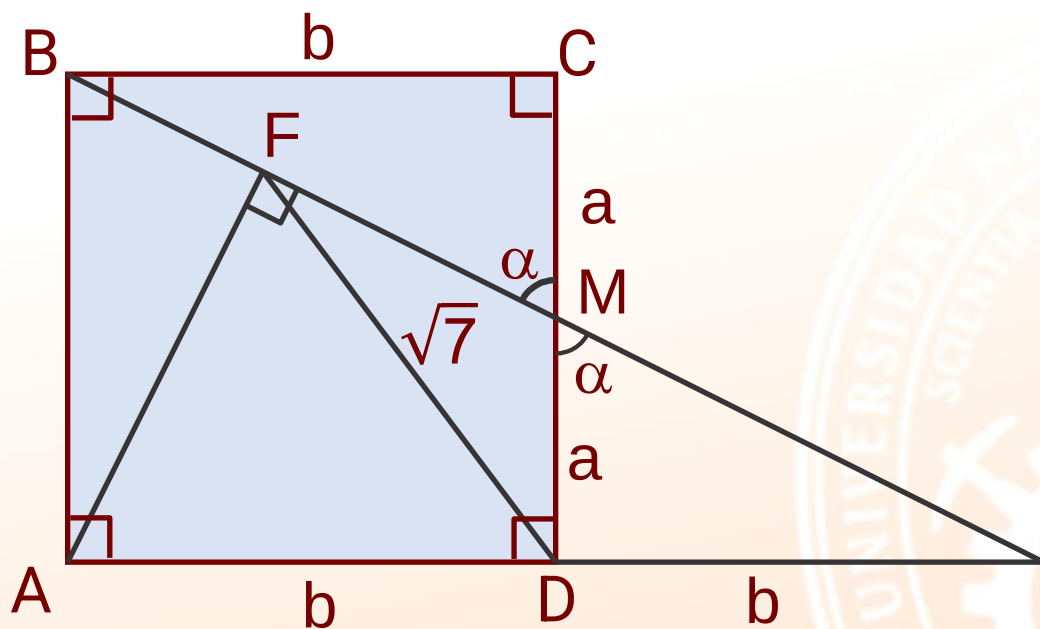
D) 7

E) 14

RESOLUCIÓN 02

En un cuadrado $ABCD$; M es punto medio de $\overline{CD}$, se traza $\overline{AF}$ perpendicular a $\overline{BM}$ en el punto F . Si $FD = \sqrt{7}$ cm, entonces el área (en cm^2) de la región cuadrada $ABCD$ es

Calcule: $S_{\square ABCD}$



$$\triangle AFE : b = \sqrt{7}$$

$$S_{\square ABCD} = \sqrt{7}^2$$

$$S_{\square ABCD} = 7$$

EJERCICIO 03

En un trapezoide ABCD, las diagonales miden 6 u y 8 u. Si el segmento, que tiene por extremos los puntos medios de dos lados opuestos, mide 5 u, calcule (en u^2) el área de la región trapezoidal ABCD.

A) 16

B) 20

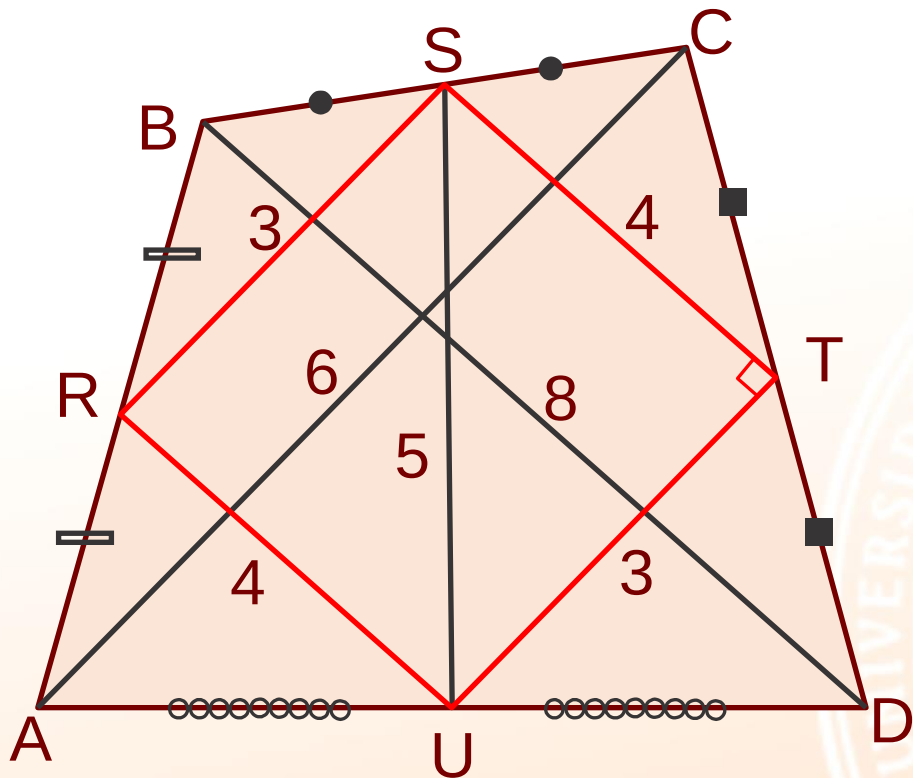
C) 24

D) 26

E) 28

RESOLUCIÓN 03

En un trapezoide ABCD, las diagonales miden 6 u y 8 u. Si el segmento, que tiene por extremos los puntos medios de dos lados opuestos, mide 5 u, calcule (en u^2) el área de la región trapezoidal ABCD.



Calcule: $S_{\square ABCD}$

$S_{\square RSTU}$ es un rectángulo

$$S_{\square RSTU} = (3)(4) = 12$$

$$S_{\square ABCD} = 2S_{\square RSTU}$$

$$S_{\square ABCD} = (2)(12)$$

$$S_{\square ABCD} = 24$$

EJERCICIO 04

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ se ubican los puntos B y C, en $\overline{AD}$ se ubica el punto Q, de modo que el cuadrilátero ABPQ es un trapecio isósceles (P en $\overline{BC}$) de bases $\overline{BP}$ y $\overline{AQ}$. Si $AQ=3(QD) = 12\text{ u}$ y $BC = l_6$, entonces el área (en u^2) de la región trapezoidal ABPQ es

A) $8\sqrt{3}$

B) $12\sqrt{3}$

C) $16\sqrt{3}$

D) $24\sqrt{3}$

E) $32\sqrt{3}$

EJERCICIO 05

En un paralelogramo ABCD, $AB = 10$ cm y T es punto de $\overline{BC}$. Si el área de la región ABD es el triple del área de la región TCD y el cuadrilátero ABTD es bicéntrico, entonces el área (en cm^2) de la región cuadrangular ABCD es

A) $20\sqrt{10}$

B) $40\sqrt{5}$

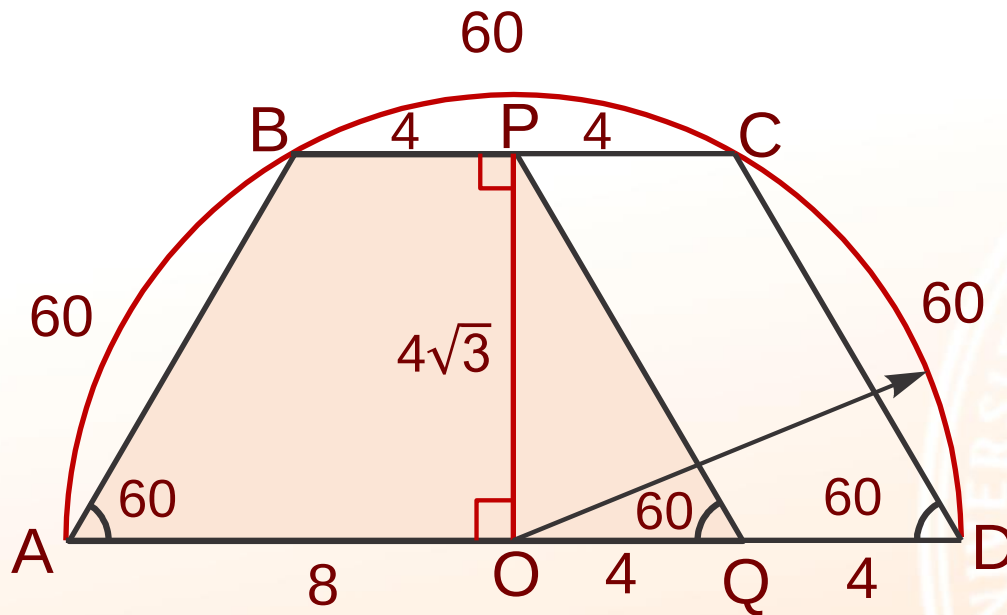
C) $44\sqrt{6}$

D) $48\sqrt{6}$

E) $20\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN 04

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ se ubican los puntos B y C, en $\overline{AD}$ se ubica el punto Q, de modo que el cuadrilátero ABPQ es un trapecio isósceles (P en $\overline{BC}$) de bases $\overline{BP}$ y $\overline{AQ}$. Si $AQ = 3(QD) = 12$ u y $BC = l_6$, entonces el área (en u^2) de la región trapecial ABPQ es



Calcule: $S_{\square ABPQ}$

Dato: $BC = l_6 \rightarrow \text{Arco } BC = 60$

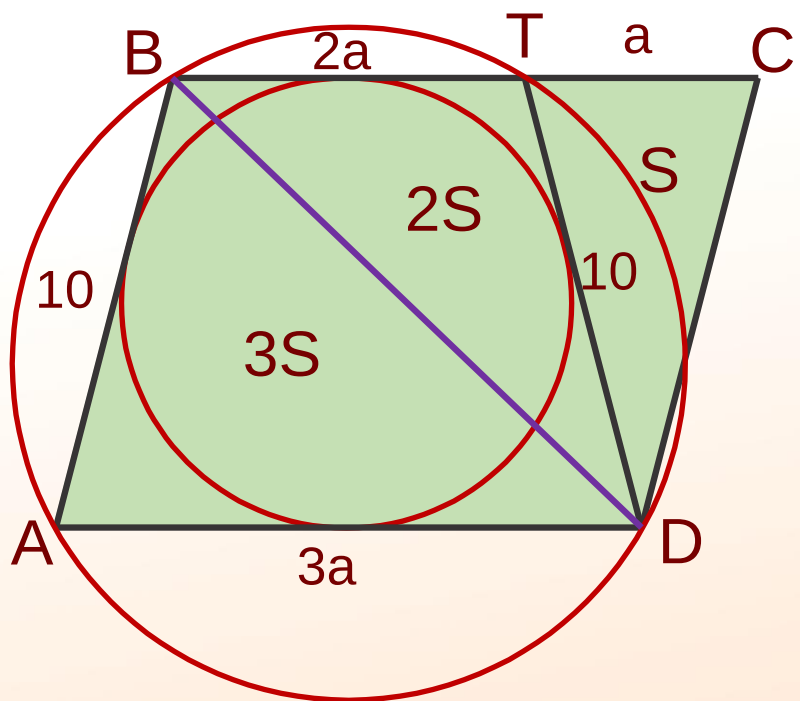
$$S_{\square ABPQ} = \left(\frac{BP + AQ}{2} \right) (OP)$$

$$S_{\square ABPQ} = \left(\frac{4 + 12}{2} \right) (4\sqrt{3})$$

$$S_{\square ABPQ} = 32\sqrt{3}$$

RESOLUCIÓN 05

Calcule: $S_{\square ABCD}$



En un paralelogramo ABCD, $AB = 10$ cm y T es punto de $\overline{BC}$. Si el área de la región ABD es el triple del área de la región TCD y el cuadrilátero ABTD es bicéntrico, entonces el área (en cm^2) de la región cuadrangular ABCD es

trapecio ABTD es bicéntrico
por ello es un trapecio isósceles:

$$\rightarrow TD = AB = 10$$

$$\text{T.Pithot } \square ABCD: 10+10=3a + 2a \rightarrow a = 4$$

En el cuadrilátero bicentrico ABTD se cumple

$$5S = \sqrt{(10)(2a)(10)(3a)} \rightarrow S = 8\sqrt{6}$$

$$S_{\square ABCD} = 6S$$

$$S_{\square ABCD} = 48\sqrt{6}$$

EJERCICIO 06

En un triángulo ACB recto en C , se traza la altura $\overline{CH}$. Luego se trazan $\overline{HE}$ y $\overline{HF}$ perpendiculares a $\overline{BC}$ y a $\overline{AC}$ en los puntos E y F , respectivamente. Si $BC = a$, $AC = b$ y T punto medio de $\overline{AB}$, entonces el área de la región cuadrangular $CFTE$ es

A) $\frac{ab}{2}$

B) $\frac{ab}{4}$

C) $\frac{ab}{5}$

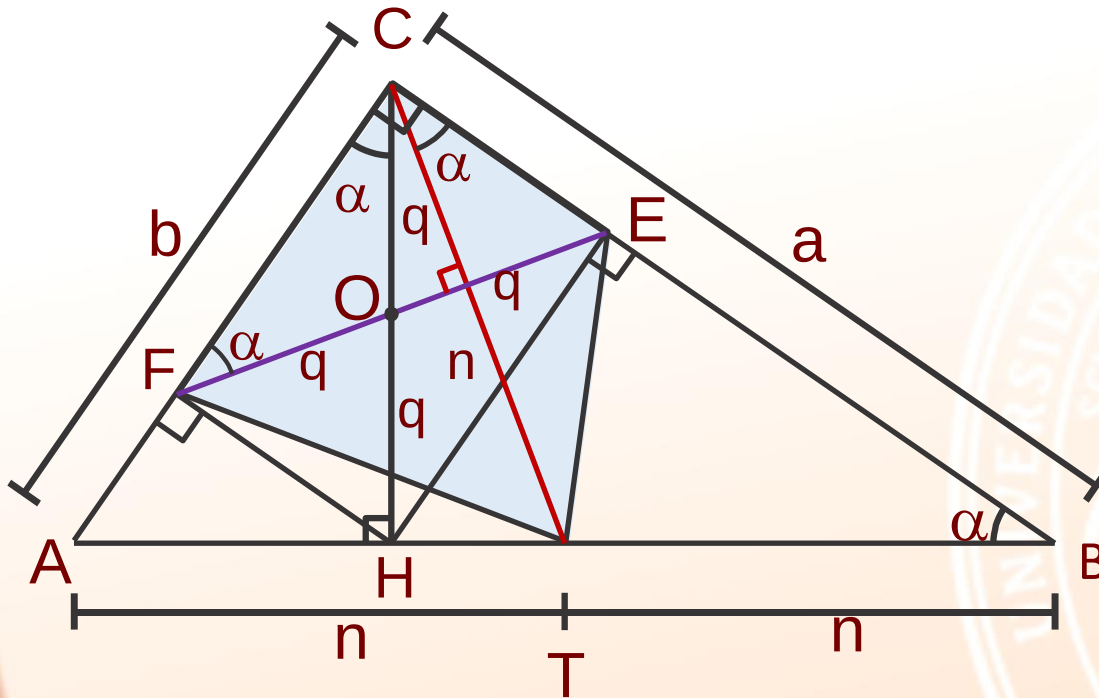
D) $\frac{ab}{6}$

E) $\frac{ab}{8}$

RESOLUCIÓN 06

Calcule: $S_{\square CFTE}$

En un triángulo ACB recto en C , se traza la altura $\overline{CH}$. Luego se trazan $\overline{HE}$ y $\overline{HF}$ perpendiculares a $\overline{BC}$ y a $\overline{AC}$ en los puntos E y F , respectivamente. Si $BC = a$, $AC = b$ y T punto medio de $\overline{AB}$, entonces el área de la región cuadrangular $CFTE$ es



$\square FCEH$ Rectángulo : $m\angle FCH = m\angle CFE$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(2q)(2n)}{2} = \frac{(a)(b)}{2}$$

$$qn = \frac{(a)(b)}{4} \dots (I)$$

$$S_{\square CFTE} = \frac{(2q)(n)\text{Sen}(90)}{2} = qn \dots (II)$$

(I) en (II) $S_{\square CFTE} = \frac{(a)(b)}{4}$

EJERCICIO 07

En la figura ABCD es un rectángulo, M y N son puntos medios de AB y AD. Calcule la relación entre las áreas de las regiones cuadrangulares EFGN y ABCD.

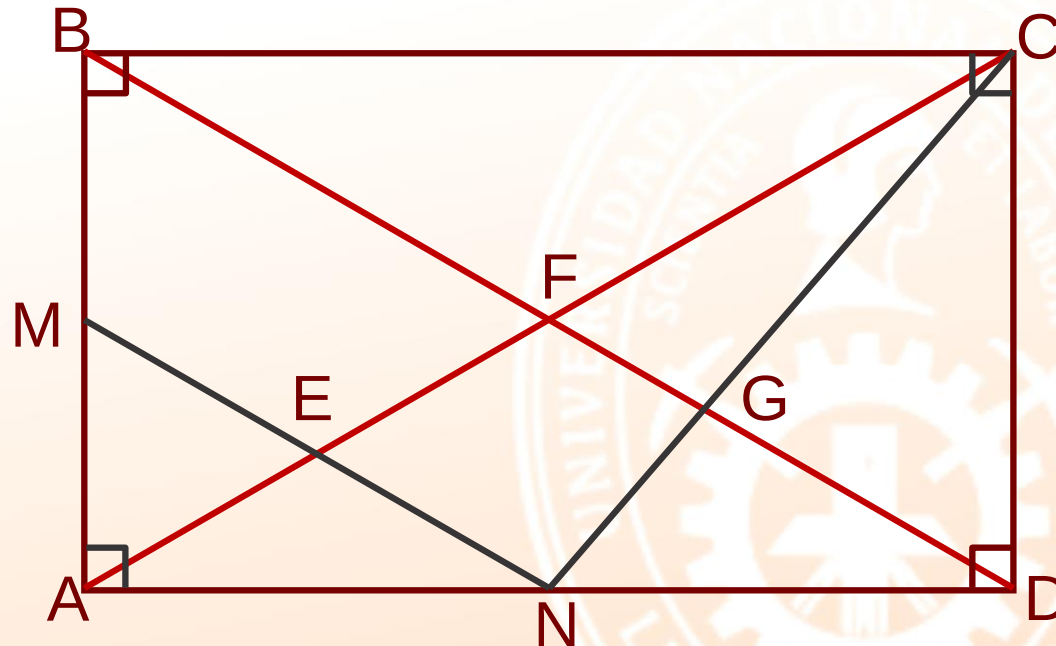
A) $\frac{3}{25}$

B) $\frac{3}{32}$

C) $\frac{5}{48}$

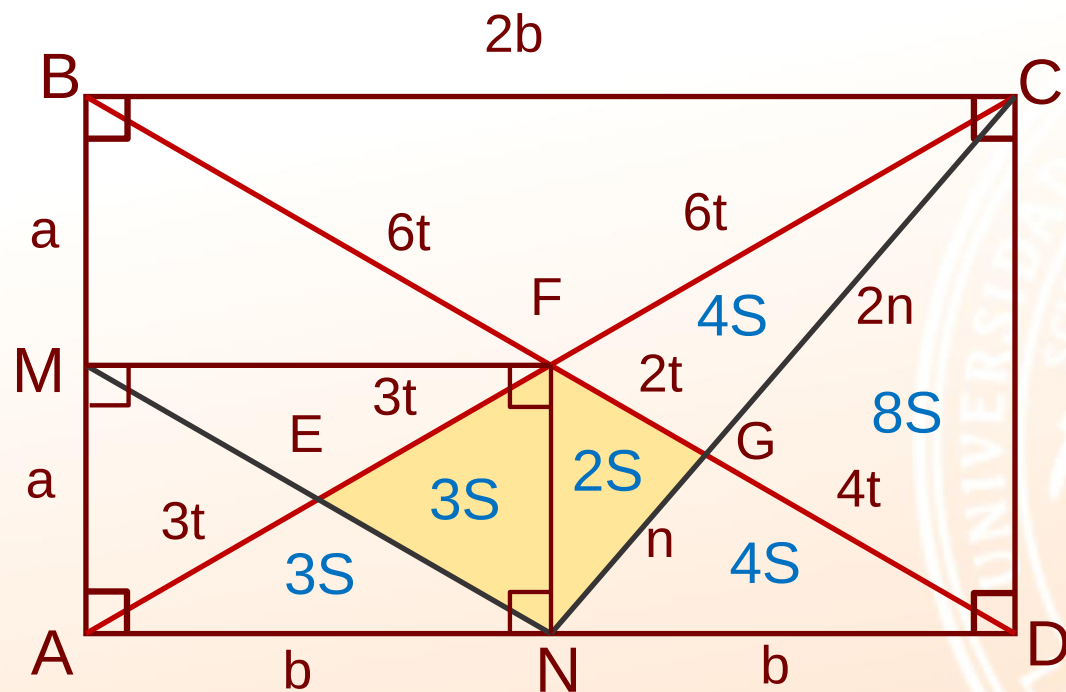
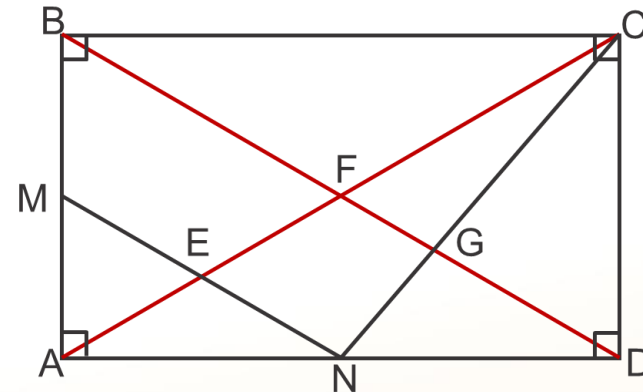
D) $\frac{4}{35}$

E) $\frac{5}{32}$



RESOLUCIÓN 07

En la figura ABCD es un rectángulo, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Calcule la relación entre las áreas de las regiones cuadrangulares EFGN y ABCD



Calcule: $\frac{S_{EFGN}}{S_{ABCD}}$

Del gráfico :

$$S_{EFGN} = 5S$$

$$S_{ABCD} = 48S$$

$$\frac{S_{EFGN}}{S_{ABCD}} = \frac{5S}{48S}$$

$$\frac{S_{EFGN}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{48}$$